Priv.Doz. Dr.(USA) Maria Charina

9. Übungsblatt zur Vorlesung "Analysis in einer Variable für LAK"

Aufgaben 9.1-9.4 sind Ankreuzaufgaben.

SS 2018

Aufgabe 9.1 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$f'(x) = nx^{n-1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(**Hinweis:** verwenden Sie die vollständige Induktion und die Produktregel der Differentiation.)

Aufgabe 9.2 Bestimmen Sie die Ableitungen (Ableitungsfunktionen) der folgenden Funktionen

(a) $f(x) = x^3 + 4, \quad x \in \mathbb{R},$

(b) $f(x) = \dfrac{x^3+4}{x^2-4}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\},$

(c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3+4}{x^2-4}}, \quad x \in (2, \infty).$

Aufgabe 9.3 Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen

(a) $f(x) = \ln(x+1)$, $x \in (-1, \infty)$,

(b) $f(x) = \sin(x) + \cos(2x)$, $x \in \mathbb{R}$,

(c) $f(x) = 10\, x^2\, e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$,

an der Stelle $A = 0$.

Aufgabe 9.4

(a) Gibt es zwei differenzierbare Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass $f + g$ nicht differenzierbar auf $\mathbb{R}$ ist?

(b) Gibt es eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und eine nicht differenzierbare Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass das Produkt $f \cdot g$ differenzierbar auf $\mathbb{R}$ ist? **Hinweis:** z.B. wähle

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} x \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

Freiwillige Zusatzaufgabe 9.1 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$f'(x) = \frac{1}{n}\, x^{1/n-1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(**Hinweis:** verwenden Sie den Satz 4.3.)

Freiwillige Zusatzaufgabe 9.2 Bestimmen Sie die Ableitungen (Ableitungsfunktionen) der folgenden Funktionen

(a) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

(b) $f(x) = 2 \cdot \cos\Big(2x^2 + x - 1\Big)$, $x \in \mathbb{R}$,

(c) $f(x) = \Big[\exp(\cos(x^2))\Big]^{-2}, \quad x \in \mathbb{R}$,

(d) $f(x) = 5\,\cos(x^2) - 1, \quad x \in \mathbb{R}$,

(e) $f(x) = 2\,x\ln(x), \quad x \in (0, \infty)$,

und werten Sie diese Ableitungen an der Stelle $A = 0$ aus.